積分への招待

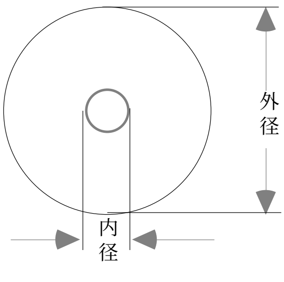
トイレット・ペーパーと数学　II

いんとろだくしょん

さあさあ，皆さんお立ち合い…
とり出だしましたる，この巻紙，
人呼んで“トイレット・ペーパー”
巻いても，巻いても，丸いだけ
さてさて，何回巻いてあるものやら
ピタッと当たればおなぐさみ
当たるも八卦，当たらぬも八卦
皆さん予想は何回か，
右の四角に書きましょう

予想　☐　**回**

トイレット・ペーパーのこと



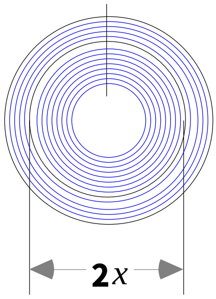
《トイレット・ペーパーには規格があります》

長さ　☐　m

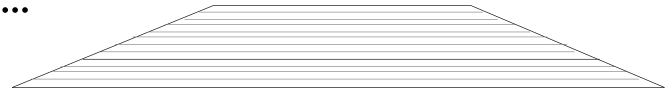
外径　☐　cm

内径　☐　cm

積分へのステップ　その１　《 トイレット・ペーパーにナイフを入れよう！》



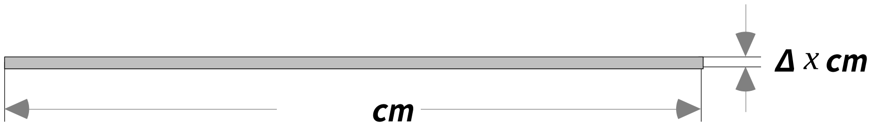
切って，
　開くと…



ここで，切ったあとのトイレット・ペーパー１枚１枚に注目しよう．１枚１枚はどれも，長さ（底辺）は違うが，とっても薄い（高さが低い）長方形です．

（問題単純化のため，トイレット・ペーパー１枚１枚の“すき間”も“高さ”に含めます）

次に，半径 x cm の部分からできる“長方形”について考えよう．



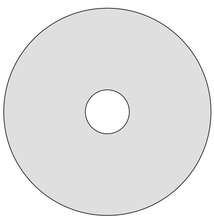
円周率を π で表すと，底辺は $\boxed{}$ cm となります．高さは『とっても薄い』の意味を大切にして Δx cm とします．

（ Δ は微小の量を表すときに用いるギリシア文字で，デルタと読みます）

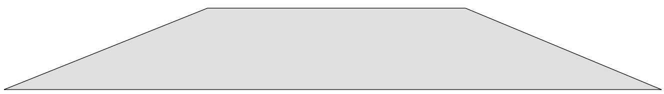
これで，“長方形”の面積が計算でき，$\boxed{}$ cm^2 となります．

積分へのステップ　その2　《 トイレット・ペーパーの側面積を考えよう！》

ナイフを入れて，切り開いてできた図形を考えに入れると



＝



（当然！）

上の図形の面積はとっても薄い“長方形”の面積を合計したものと考えられます．

ここで，半径x cm の部分からできる“長方形”の面積は，$2\pi x\cdot\Delta x$（cm^2）だったので，半径 x により変化する“長方形”の面積の，$x=2$　から，$x=5$　までの合計を，

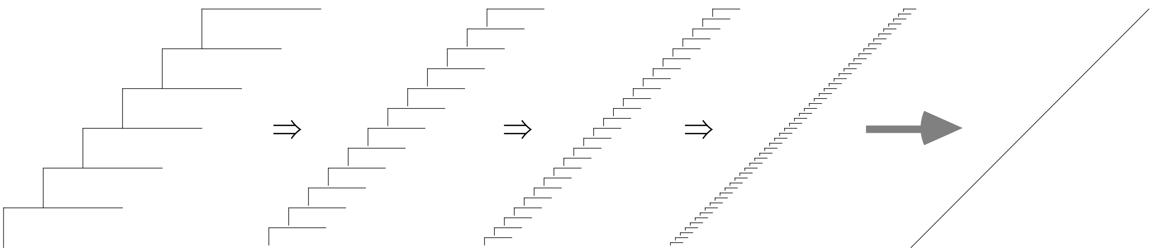
$$\text{合計}_{x=2}^{x=5}\left(2\pi x\cdot\Delta x\right)$$

と書くことにします．

この　$\text{合計}_{x=2}^{x=5}\left(2\pi x\cdot\Delta x\right)$　は，トイレット・ペーパーの側面積とほとんど等しいけれど，“長方形”を積み上げてできるデコボコの分だけ誤差があります．

積分へのステップ　　その3　　《誤差をなくそう！》

長方形の“高さ”をどんどん小さくしていくと，デコボコは次第になめらかになっていきます．



このとき，“高さ”《Δx》は ―― 変身して→　微少な“高さ”《dx》に，

$\text{合計}_{x=2}^{x=5}\left(2\pi x\cdot\Delta x\right)$　も ― 変身して→ $\int_{x=2}^{x=5}2\pi x dx$ または $\int_2^5 2\pi x\,dx$

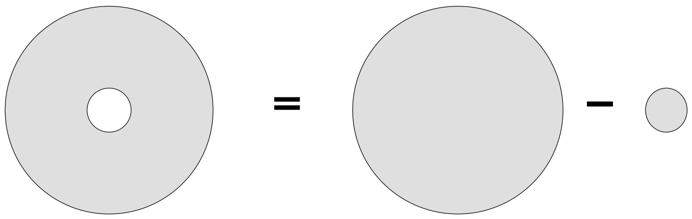
になります．

この $\int_2^5 2\pi x\,dx$ のことを，$2\pi x$ の $x=2$ から $x=5$ までの『定積分』といいます．

積分へのステップ　　その4

《もう一度，トイレット・ペーパーの側面積を考えよう！》

トイレット・ペーパーの側面積を単純に円の面積の関係として考えると，



だから，外径を $10\,cm$ ，内径を $4\,cm$ とすると，

面積は $\boxed{}$ − $\boxed{}$ ＝ $\boxed{}$ （ cm^2 ）です．

積分へのステップ　　その5　　《定積分の計算を整理すると…》

その3，その4 の結果より，トイレット・ペーパーの側面積は，［ $\int_2^5 2\pi x\ dx$ ］と［ $5^2\pi - 2^2\pi$ ］の２通りに表すことができます．したがって，

$$\int_2^5 2\pi x\,dx = 5^2\pi - 2^2\pi$$

が成り立ちます．

ここで，半径が x である円の面積は［ πx^2 ］なので，［ $5^2\pi$ ］・［ $2^2\pi$ ］は［ πx^2 ］に［ $x=5$ ］・［ $x=2$ ］を代入したものと考えることができます．

そして，定積分 $\int_2^5 2\pi x\,dx$ は　$\int_2^5 2\pi x\,dx = \left[\pi x^2\right]_2^5 = 5^2\pi - 2^2\pi$　と計算します．

一般に，定積分の計算は $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$　のようにします。

また，$f(x)$ から $F(x)$ を求めるのには，$2\pi x$ から πx^2（ $2x$ から x^2 ）が求められたように“規則”があります．その規則は，“*トイレット・ペーパーの話題*”を終えてから説明します．

話題を，トイレット・ペーパーのことに戻して

《トイレット・ペーパーが何回巻きか，実際に確かめよう！》

［$\text{合計}_{x=2}^{x=5}(2\pi x\cdot\Delta x)$］**は，トイレット・ペーパーの側面積とほぼ等しくなりますが，これはトイレット・ペーパーを一枚の長い紙とした場合の《長さ × Δx》も意味します．**

トイレット・ペーパーがn回巻きで長さLm，外径が$2R$cm，内径が$2r$cm，“薄さ”が Δxcm であるとすれば，$n\times\Delta x=R-r$ と表せます．

一方，トイレット・ペーパーの側面積は，《全体の長さ × Δx》とも考えられるので，

$$\begin{aligned} L\times\Delta x\times 100 &= \pi R^2-\pi r^2 \\ &= \pi\left(R^2-r^2\right) \\ &= \pi\left(R+r\right)\left(R-r\right) \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} L\times\Delta x\times 100 &= \pi\left(R+r\right)\times n\times\Delta x\ , \\ 100L &= n\pi\left(R+r\right) \end{aligned}$$

したがって，

$$n=100L\,／\,\pi\left(R+r\right)$$

さあ，計算しよう！

$L=$ ＿＿＿＿　$R=$ ＿＿＿＿　$r=$ ＿＿＿＿　$\pi=$ ＿＿＿＿

として，

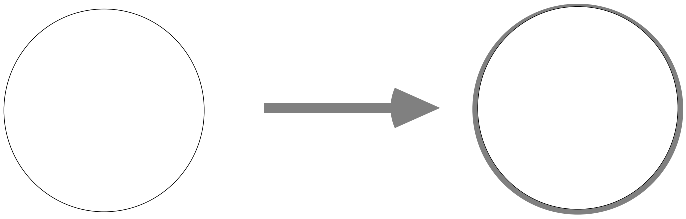
$n=$ ＿＿＿＿

さあ，実験しよう！

一般に，定積分は $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ **のように計算しました．**

トイレットペーパーを使って，$2\pi x$ **から**πx^2**（** $2x$ **から**x^2 **）を求めたように，他の物でも，**$f(x)$ **から**$F(x)$ **を求められることを確かめ，その“規則”を考えます．**

球に薄い膜（とりあえず，アルミフォイルで代用）を貼りつけます．
すると，体積はどのように変化するでしょう？



薄い膜の厚さ（薄さ）が均等であるとして，微小な“厚さ”を《 Δx **》で表せば，体積の増加量は《 表面積 ×** Δx **》と計算できます．**

よって，半径x **の球の体積を**$V(x)$**，表面積を**$S(x)$ **で表せば，次のように半径**r **の球の体積**$V(r)$**を求める定積分の関係式を作ることができます！**

$$\int \qquad dx = \left[\qquad \right] = \qquad - \qquad =$$

さて，半径x **の球の体積を表す式・表面積を表す式を覚えてますか？**

> **リンゴの皮をむきます．むいた皮をしきつめると，表面積と体積の変化量の関係がはっきり見えます．球形のゴムボールでは，皮をむくのではなく球のまわりに細いひもを巻つけてみます．**
> **すると，球の表面積がわかるのです…**

半径x **の球の体積・表面積を表す式は次のようでした，**

体積：　　　　　　　　　　表面積：

これで，$f(x)$ **から**$F(x)$ **を求めるのための“規則”が追加されます．**

積分へのステップ　その7　《 定積分の規則・まとめ 》

$$\int_2^5 2\pi x\,dx = \left[\pi x^2\right]_2^5 = 5^2\pi - 2^2\pi$$ **（by　トイレット・ペーパー）**

$$\int_0^r 4\pi x^2\,dx = \left[\frac{4}{3}\pi x^3\right]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi 0^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$ **（by　球）**

$f(x)$ **から** $F(x)$ **を求める規則に近づきました！**　$f(x) \to F(x)$ **の規則を簡単にしてみると，**

$2\pi x \to \pi x^2$　**だから，** $2x \to x^2$　**すると…**　$x \to$　**？**

$4\pi x^2 \to \frac{4}{3}\pi x^3$　**だから，** $4x^2 \to \frac{4}{3}x^3$　**すると…**　$x^2 \to$　**？**

もうひとつだけ考えます，　$1 \to$　**？**

積分へのステップ　その8　《 不定積分 》

$f(x) \to F(x)$ **の規則を**

数学的には， $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ **（**c **は積分定数）と書きます．**

この書き方をするとどうなるでしょうか？

$\int x\,dx =$　　　$\int 2\pi x\,dx =$

$\int x^2\,dx =$　　　$\int 4\pi x^2\,dx =$

$\int 1\,dx =$　　　$\int 318\,dx =$

『積分への招待 』 これにておしまい…

《 解　　説 》

授業『トイレット・ペーパーと数学』を発表したところ，「トイレット・ペーパーは教材か？　それとも教具か？」などという論争が起きたとか…　何よりも，身近なものを使って『計算の威力』を見せつける，そんな授業として盲学校までも含めて全国に波及し，「トイレット・ペーパーはどんな単元の授業に利用できるか？」についても話題になりました．その中でも，「微分・積分に利用できるのでは…」の声は耳について離れませんでした．

３年前の冬，第３回授業改革フェスティバルの“ 数学授業バトル ”では「積分の導入授業を…30分１本勝負」なる全くもって授業者泣かせの方針が…　しかし，これは“ トイレット・ペーパーと数学II ”デビューのチャンスです．

曲線を凸凹したもので近似し，凸凹をどんどん小さくしていくと…　極限を感覚的にとらえれば（ゴマカシではあるが）定積分をすっきりと理解できるはず．Δx なる微小の大きさを視角的に理解するには，トイレット・ペーパー１枚１枚の“ 薄さ ”はもってこい，立派な教材です．

授業の骨組みはできあがったものの「授業をどう30分に収めるか？」が難問です．「あれもやりたい，これもやりたい」との格闘の末やっと授業プリントが完成．いよいよ授業バトルです…

円の面積が，薄い長方形（切断したトイレット・ペーパー）の面積の和として『近似』できること，その『極限』として《定積分》を定義．約23分経過，順調です．

最後は『計算の威力』を発揮する番，“ トイレット・ペーパーは何巻きか？ ”の実験です．（実のところ，何巻きであるかは積分とは無関係です…）

２枚重ね30mのもので123巻きの計算値に対し，実験結果は122巻き．思わず拍手が沸き上がり，授業終了！　偶然とはいえ，実にうまくいったものです．

その年の夏，愛知サマーセミナーでは100分の授業【積分への招待---トイレット・ペーパーと数学II】にチャレンジしました．積分という建物の入口に立って，建物の中を（それも入口の周辺だけを）ざっと眺める．しかし，積分の基本的な考えはしっかり勉強する．中１から高３の17名を相手にじっくり積分の導入授業の取り組みました…　ここでも123.26巻きの計算値に対し，実験結果は124巻き．勢いに乗って『球の表面積から体積への積分』，『定積分の規則・まとめ』まで突き進みました．

生徒の反応は（「積分のことがよく分かった」など）全体として良かったものの，高１生より高３生の方が良いのは，当然のことかもしれません？！

この教材は検討会での指摘を生かし，内容を膨らませ，定積分の定義を丁寧に扱うように再構成したもので，不定積分にも触れてあります．